Solution proposée par M.Ouzi

e-mail : cpgespe.mp@gmail.com

CORRECTION DU C-N-C PHYSIQUE-II :2011

2012/2013

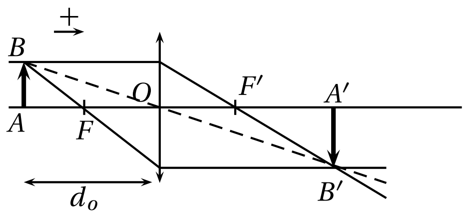
Filière : TSI

Interféromètre de Michelson

1. Optique géométrique

1.1. L'image est nette si la lentille est stigmatique et applanétique, dans la pratique il suffit qu'elle soit utiliser dans les conditions de Gauss c-à-d les rayons issus de AB sont peu incliné par rapport à l'axe optique et proche du centre optique de L_o.

1.2. .



L'image est réelle renversée.

1.3. Les triangles $(0A'B')$ et (OAB) sont semblables alors : $\frac{A'B'}{OA'} = \frac{AB}{OA}$ et donc le grandissement transversale est : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$
$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'F'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OF'}}$ or $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ alors : $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{OF'}}$
c-à-d : $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OF'} - \overline{OA'}}{\overline{OF'}}$ d'où : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$

1.4. On note $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$ ($p < 0$ et $p' > 0$) donc $D = p' - p$ (distance positive) alors d'après la relation de conjugaison on a : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'_o}$ c-à-d $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p' - D} = \frac{1}{f'_o}$ soit : $-Df'_o = p'(p' - D)$ et donc $p'^2 - p'D + D'f'_o = 0$ dont le discriminent s'écrit par : $\Delta = D^2 - 4Df'_o$ donc l'image existe si p' est réelle alors il faut pour cela que Δ soit positive et donc $f'_o \leq \frac{D}{4}$ (c'est la condition recherchée).

1.5. Si $D = 1\ m$ alors $f'_o \leq 25\ cm$, la valeur usuelle de $20\ cm$ convient largement.

2. Lampe à vapeur de mercure

2.1. Le spectre est discontinu car $E = h\nu$ donc puisque l'énergie est discontinue alors les fréquences sont discontinues

2.2. $\Delta E = E_3 - E_1 = h\nu_{3\to1} = \frac{hc}{\lambda_{3\to1}}$

2.3. $\lambda_{3\to1} = \frac{hc}{E_3 - E_1} = \frac{6,63.10^{-34} \times 3.10^8}{(-2,72 + 4,99) \times 1,6.10^{-19}}$
$\lambda_{3\to1} = 548\ nm$

2.4. $\lambda_{3\to1} \in [400nm, 800nm]$ donc elle se situe dans le domaine visible.

3. Optique ondulatoire

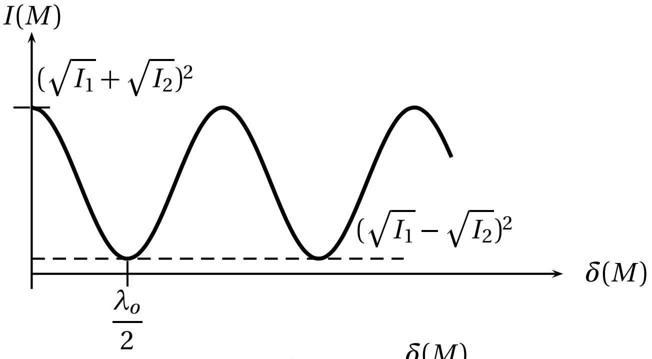
3.1. Questions préliminaires

3.1.1. Une vibration lumineuse de nature vectorielle peut être représentée par une grandeur scalaire s'elle est non polarisée et s'elle est polarisée il faut que les rayons qui vont interférer aient le même état de polarisation

3.1.2. La différence de marche, en un point M, est : $\delta(M) = (S_2M) - (S_1M)$

3.1.3. L'intensité lumineuse de la source i ($i = 1, 2$) est : $I_i(M) = \beta < \underline{a}_i(M,t).\underline{a}_i^*(M,t) >_{\tau_r}$ c-à-d $I_i(M) = \beta A_{oi}$, où β est un coefficient de proportionnalité et τ_r est un temps de réponse du récepteur utilisé.
En M la vibrations issue de S_i est :
$\underline{a}_i(M,t) = A_o e^{j(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{S_iM})}$ donc :
$I(M) = \beta < (\underline{a}_1(M,t) + \underline{a}_2(M,t)).(\underline{a}_1(M,t) + \underline{a}_2(M,t))^* >_{\tau_r}$
$I(M) = \beta[< a_1.\underline{a}_1^* >_{\tau_r} + < a_2.\underline{a}_2^* >_{\tau_r} + 2 < \mathcal{R}el(\underline{a}_1.\underline{a}_2^*) >_{\tau_r}]$ finalement :
$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda_o})$

3.1.4. .



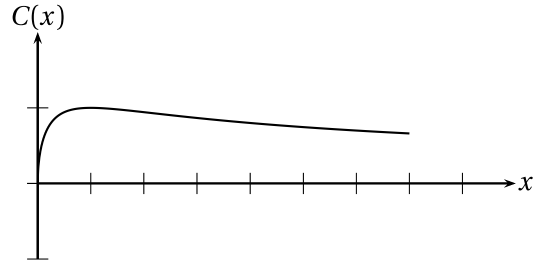
3.1.5. I_M correspond à $\cos(2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda_o}) = 1$ donc : $I_M = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ et I_m correspond à $\cos(2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda_o}) = -1$ c-à-d : $I_M = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$.

Le contraste s'écrit donc : $C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I2}$.

C peut se mettre sous la forme :

$$C = \frac{2I_1\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}}{I_1(1+\frac{I_2}{I_1})} = \frac{2\sqrt{\frac{I_2}{I_1}}}{1+\frac{I_2}{I_1}}$$

On pose $x = \frac{I_2}{I_1}$ donc $C = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ donc quand $x \to 0$ alors C tend vers 0 et quand $x \to \infty$ alors $C \to 0$ et donc C passe par un maximum défini par $\frac{dC}{dx} = 0$ qui correspond à $x = 1$ c-à-d : $I_1 = I_2$.



Lorsque les intensités sont différentes le contraste diminue

3.1.6. Lorsque $I_1 = I_2$ le contraste est maximale est vaut 1

3.1.7. Lorsque les sources sont monochromatiques et différentes (donc elles sont non cohérentes) alors l'intensité est :

$$I(M) = I_1 + I_1$$

La méthode la plus facile d'obtenir des sources cohérentes est d'utiliser une même source primaire et de faire subir aux rayons deux chemins différents, on obtiendra alors interférence si $\delta(M)$ est inférieur à la longueur de cohérence pour assurer la superposition de rayon ayant même train d'onde ou ayant une partie commune du même train d'onde.

3.1.8. L'ordre d'interférence est donnée par :

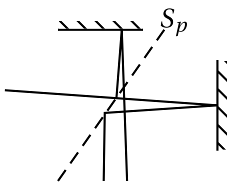
$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_o}$$

Les applications possibles d'interférences lumineuses sont : mesure d'indice d'un milieu transparent, mesure de faibles épaisseur de lames transparentes ou mesure de longueur d'onde etc...

3.2. Description de l'interféromètre de Michelson réel

3.2.1. La présence de la lame séparatrice dans l'interféromètre le situe parmi les interféromètre à division d'amplitude car on division énergétique des faisceaux incidents

3.2.2. La séparatrice permet d'obtenir des rayons issus d'une même source et pouvant emprunter des chemins différents.

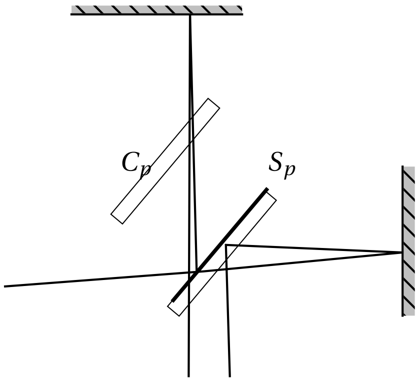


On a intérêt à choisir le c■fficient de transmission égale à 50 % car on a besoin des rayons transmis et réfléchi à la fois et pour que les miroirs soient éclairés de la même façon.

⚠Notez que même si le coefficient de réflexion était différent de 50 % on aura les intensités émergeant seront égales et donc les franges seront bien contrastées.

3.2.3. Lors de la traversée de la séparatrice la moitié de l'intensité incidente est transmise vers M_2 puis les rayons réfléchis sur M_2 subissent une réflexion sur S_p soit 25 % est réfléchi est 25 % retourne vers la région de la sources et donc perdu et la même chose de coté du miroir M_1 donc 50 % de l'intensité incidente est perdue.

3.2.4. La compensatrice permet de compenser le déphasage supplémentaire introduit par le fait que la séparatrice a une épaisseur non nulle.



Chaque rayon traverse la lame d'épaisseur non nulle trois fois et donc le déphasage se compense.

3.2.5. La lame V_a à l'entrée de l'interféromètre est une lame anti-calorique qui protège le miroir (surtout M_2) d'un échauffement excessif lors des séances de TP.

3.3. Michelson éclairé par une source étendue

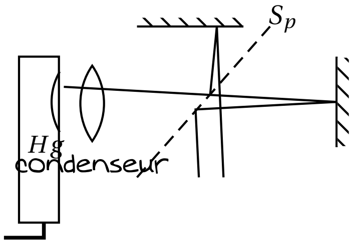
3.3.1. Le déphasage introduit par S_p est compensé par celui introduit par C_p donc dans l'étude théorique cela revient à supposer S_p s'épaisseur nulle

3.3.2. On commence par un réglage grossier de la perdepndicularité des miroirs et le parallélisme de S_p et C_p, on rend C_p parallèle à S_p en les attaquant seules avec un faisceau laser, lorsque les tâches obtenues sont confondus alors elles sont parallèles, on ne touche plus au vis de réglage de C_p.
Après, on envoi le faisceau laser sur l'interféromètre, on obtient deux ensembles de tâches séparés et alignés, on agit ensuite sur les vis de réglage des miroirs pour faire superposer ces tâches dans ce cas l'interféromètre est réglé pour le laser, Pour la lumière de la lampe spectrale, on chariote M_2 afin de se rapprocher du contact optique, on conjugue les franges localisées au niveau de M_1, avec une lentille convergente, avec un écran d'observation

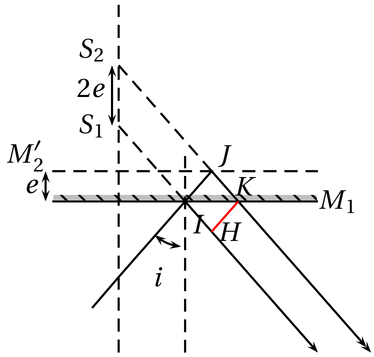
3.3.3. Franges d'égale inclinaison

3.3.3.1. $\lambda = 546,1\ nm$ dans le vide correspond à une couleur verte.

3.3.3.2. Pour obtenir des franges en égale inclinaison, l'interféromètre de Michelson doit être éclairé en lumière quasi parallèle en y parvient en utilisant un condenseur comme proposé dans le schéma suivant :



3.3.3.3. Les franges sont localisées à l'infini car les rayons qui vont interférer sort de l'interféromètre parallèles.



Les franges sont définies par $p = \dfrac{\delta}{\lambda_o} = cte$ donc $\overline{S_2M} - \overline{S_1M} = cte$ donc M est l'ensemble des hyperboloïdes d'axe de révolution S_1S_2 par conséquence leur intersection avec le plan normale à S_1S_2 donne des anneaux.

3.3.3.4. Les ellipses obtenues au lieu des anneaux sont dues au non parallélismes parfait des lames séparatrice et compensatrice pour les rendre sous forme d'anneaux on agit sur les vis de réglages de C_p (S_p étant fixe)

3.3.3.5. En utilisant le schéma précédent on a (l'indice étant égale à 1) :
$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (SJM) - (SIM)$
$\delta(M) = \overline{SJ} + \overline{JM} - \overline{SI} - \overline{SM}$, or $\overline{SI} = \overline{S_1I}$ car S_1 est image de S à travers M_1 et $\overline{SJ} = \overline{S_2M}$ car S_2 est image de S par rapport à M_2' donc : $\delta(M) = \overline{S_2J} + \overline{JM} - (\overline{S_1I} + \overline{IM})$ finalement : $\delta(M) = \overline{S_2M} - \overline{S_1M} = (S_2M) - (S_1M)$

3.3.3.6. Toujours en utilisant le schéma précédent on a :
$\tan i = \dfrac{\frac{IK}{2}}{e}$ et $\sin i = \dfrac{\overline{IH}}{\overline{IK}}$ et $\cos i = \dfrac{e}{\overline{IJ}}$
donc $\delta(M) = IJ + JK - IH$ ($HM = KM$ d'après le théorème de Malus-Dupin) c-à-d $\delta(M) = \dfrac{2}{\cos i} - 2e\dfrac{\sin^2 i}{\cos i}$ donc $\delta(M) = 2e\cos i$

:

On peut aussi calculer δ en partant de S_1 et S_2 séparée de $2e$, en effet : si H' est la projection de S_1 sur le rayon S_2M donc $\delta = S_2M - S_1M = S_2H' = 2e\cos i$ puisque $H'M = S_1M$ d'après Malus-Dupin.

Les franges sont caractériser par $p = \dfrac{\delta}{\lambda_o} = cte$ donc $i = cte'$ d'où le nom de franges d'égale inclinaison

3.3.3.7. Appelons I' l'intensité lumineuse incidente sur l'interféromètre, à la traversé de S_p l'intensité est divisée par deux et puisque les rayons qui interfèrent traversent S_p deux fois chacun alors l'intensité émergeant de l 'interféromètre est égale à $\dfrac{I'}{4}$.

L'intensité en un point M de la figure d'interférence est donnée par :

$I(M) = \dfrac{I'}{4} + \dfrac{I'}{4} + 2\sqrt{\dfrac{I'}{4}\dfrac{I'}{4}}\cos(2\pi \times \dfrac{2e\cos(i)}{\lambda_o})$

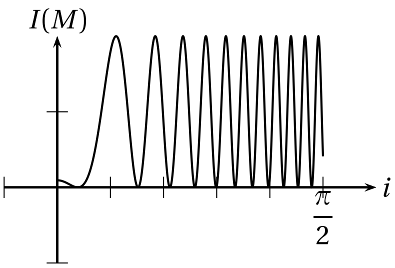
c-à-d : $I(M) = \dfrac{I'}{2}(1+\cos(\dfrac{4\pi e}{\lambda_o}\cos i))$

Donc en posant $I_o = \dfrac{I'}{2}$ on obtient :

$I(M) = I_o(1+\cos(\dfrac{4\pi e}{\lambda_o}\cos i))$

De ce qui précède on a I_o est la moitié de l'intensité incidente qui est encore la valeur moyenne de $I(M)$.

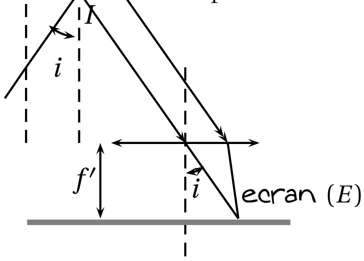
Si on utilise I_1 et I_2 on trouve que $I_1 = I_2 = 2I_o$



Il faut noter que même si $i < \dfrac{\pi}{2}$ *la valeur de* $\dfrac{4\pi e}{\lambda_o}\cos i$ *peut varier entre* 0 *et* $2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Les rayons des anneaux se resserrent au delà du centre et ils ne s ont pas régulièrement espacés.

3.3.3.8. .



3.3.3.9. Pour projeter les franges d'interférences on utilisera la lentille de grande focale car l'écran sera à quelques dizaines de centimètre de l'écran donc on choisira celle ayant $f' = 1\ m$.

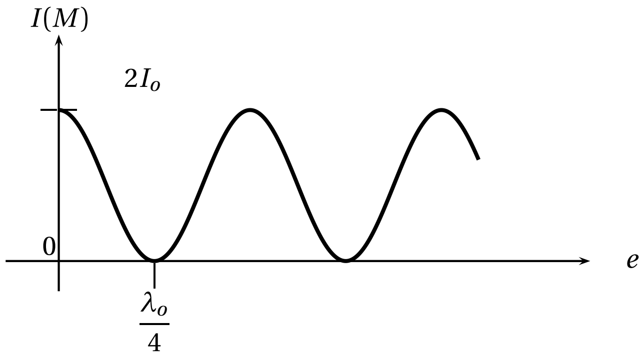
Pour l'enregistrement de l'intensité des franges on utilisera la lentille de focale $f' = 20\ cm$ car l'intensité au centre diminue avec la distance si on utilise celle ayant $f' = 1\ m$ et si on utilise celle ayant $f' = 5\ mm$ les rayons captés sont faibles (monture faible) et l'encombrement augmente.

3.3.3.10. Au centre on a $i = 0$ donc $\delta = 2e$ alors l'ordre d'interférence est $p_o = \dfrac{2e}{\lambda_o}$

$p_o = \dfrac{2\times 1,5.10^{-3}}{546,1.10^{-9}} = 5493,5$

L'ordre est au centre est demi-entier fractionnaire donc la frange au centre est sombre.

3.3.3.11. L'intensité lumineuse passe d'un maximum à un minimum, au centre, lorsque $\cos\dfrac{2\pi}{\lambda_o}\delta$ passe de 1 à -1 donc lorsque $\dfrac{4\pi e}{\lambda_o}$ passe de $2n\pi$ à $(2n+1)\pi$, c-à-d : e passe de $\dfrac{n\lambda_o}{2}$ à $\dfrac{n\lambda_o}{2} + \dfrac{\lambda_o}{4}$ donc lorsque M_2 se déplace de $\dfrac{\lambda_o}{4}$.



Le miroir ne peut pas être charioter indéfiniment tout d'abord pour des raisons simples de fabrication mais surtout car quand e augmente les franges disparaissent puisque δ devient supérieur à la longueur de cohérence.

3.3.3.12. Au voisinage de l'incidence normale i est faible donc $\cos i = 1 - \dfrac{i^2}{2}$ et $\sin i \simeq \tan i \simeq i$.

L'ordre en un point M de l'anneau de rayon R_k est :

$p = \dfrac{2e\cos i}{\lambda_o} = \dfrac{2e}{\lambda_o}(1-\dfrac{i^2}{2})$ or $\tan i = i = \dfrac{R_k}{f'}$ d'autre part :

L'ordre au centre p_o est demi entier fractionnaire, la frange centrale est donc sombre alors l'ordre du premier anneau brillant, de rayon R_1, est $p_o - 0,5$ celui de deuxième rayon R_2 est $p_o - 0,5 - 1$ et ainsi de suite, alors :

l'ordre de rayon R_k est $p = p_o - 0,5 - (k-1)$

$p = p_o(1 - \dfrac{R_k^2}{2f'^2})$ donc :

$$R_k = \sqrt{2}f'\sqrt{1-\frac{p}{p_o}} = \sqrt{2}f'\sqrt{1-\frac{p_o-0,5-(k-1)}{p_o}}$$

finalement : $R_k = \sqrt{2}f'\sqrt{\dfrac{k-0,5}{p_o}}$

3.3.3.13. Pour l'anneau de rayon R_{k+1} l'ordre est $p-1$ (L'ordre est maximale au centre et donc diminue au delà du centre).

$R_{k+1} = \sqrt{2}f'\sqrt{1-\dfrac{p-1}{p_o}}$ et $R_k = \sqrt{2}f'\sqrt{1-\dfrac{p}{p_o}}$

donc : $R_{k+1}^2 - R_k^2 = f'^2\dfrac{\lambda_o}{e}$ $\quad (p_o = \dfrac{2e}{\lambda_o})$

3.3.3.14. Pour une frange donnée l'ordre est constant $p = 2e\dfrac{\cos i}{\lambda_o} = cte$ donc si les anneaux défilent vers le centre, i diminue alors $\cos i$ augmente donc e diminue, dans ce cas les rayons des anneaux diminuent, c'est normal puisque l'anneau considéré défile vers le centre, si on raisonne sur le k^{ieme} anneau de rayon R_k, ce dernier augmente et le nombre d'anneau observés diminue et d'après la relation de la question précédente, les anneaux deviennent plus larges quand e diminue.

3.3.3.15. Le contact optique correspond à $OO_1 = OO_2$ c-à -d que les miroirs M_1 et M_2 sont perpendiculaire et à égale distance de centre de la séparatrice S_p (donc :$e=0$).

Pour atteindre le contact optique on chariote M_2 dans le sens où les franges défilent vers le centre, le contact optique est alors atteint quand l'écran devient uniforme.

3.3.3.16. La lumière blanche permet de réaliser le contact optique d'une façon plus précise car sa longueur de cohérence, ℓ_c est faible et donc pour avoir interférence il faut que $\delta < \ell_c$ alors leur disparition correspond à $\delta \to 0$ d'une manière la plus précise possible.

3.3.3.17.1. $I(M) = I_o(1+\cos\dfrac{2\pi\delta}{c}\nu)$

3.3.3.17.2. On pose $\tau = \dfrac{\delta}{c}$ donc :

$I(M) = I_o(1+\cos 2\pi\nu\tau)$.

τ est donc le temps séparant deux trains d'onde des deux rayons qui interfèrent empruntant deux chemins différents

3.3.3.17.3. $dI(\tau) = I_{o\nu}(1+\cos 2\pi\nu\tau)d\nu$

3.3.3.17.4. Le terme $e^{-\frac{E}{k_BT}}$ est appelé facteur de $Boltzmann$

3.3.3.17.5. $E = \dfrac{1}{2}mV^2$ donc $P(E) = P_o e^{-\frac{mV^2}{2k_BT}}$

3.3.3.17.6. D'après la formule "Doppler"

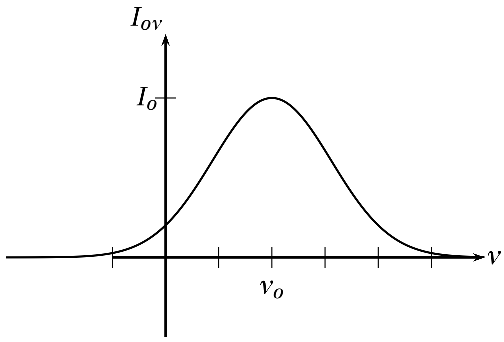
$V = c(\dfrac{\nu-\nu_o}{\nu_o})$ donc :

$P(E) = P_o e^{-mc^2\frac{(\nu-\nu_o)^2}{2k_BT\nu_o^2}}$ et par proportionnalité

$I_{o\nu} = I_o e^{-mc^2\frac{(\nu-\nu_o)^2}{2k_BT\nu_o^2}}$ qu'on peut écrire par :

$I_{o\nu} = I_o e^{-\frac{(\nu-\nu_o)^2}{a^2}}$ où $a^2 = \dfrac{2k_BT\nu_o^2}{mc^2}$

3.3.3.17.6. La courbe représentant $I_{o\nu} = f(\nu)$ est :



3.3.3.17.7. La largeur à mi-hauteur $\Delta\nu$ est donnée par $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ telle que ν_1 et ν_2 sont solution de $I_{o\nu}(\nu) = \dfrac{I_{o\nu_{max}}}{2}$

$I_{o\nu_{max}} = I_o$ elle correspond à $\nu = \nu_o$

donc : $I_{o\nu}(\nu) = \dfrac{I_o}{2}$ c-à-d :

$(\nu-\nu_o)^2 = a^2\ln 2$, ce qui donne :

$\nu_2 - \nu_o = a\sqrt{\ln 2}$ et $\nu_1 - \nu_o = -a\sqrt{\ln 2}$

donc : $\Delta\nu = 2a\sqrt{\ln 2}$

Application numérique :

$a = \sqrt{\dfrac{2k_BT\nu_o^2}{mc^2}}$ donc $\Delta\nu = 2\sqrt{\dfrac{2k_BT\nu_o^2\ln 2}{mc^2}}$ et puisque $M = \mathcal{N}_A m$ et $\nu_o = \dfrac{c}{\lambda_o}$ alors :

$$\Delta\nu = 2\sqrt{\frac{2\mathcal{N}_A k_B T\ln 2}{M\lambda_o^2}}$$

$$\Delta\nu = 2\sqrt{\frac{2\times 6,02.10^{23}\times 1,38.10^{-23}\times 500\times\ln 2}{200,6.10^{-3}\times(546,1.10^{-9})^2}}$$

$\Delta\nu =$

3.3.3.17.8. On a : $dI(\tau) = I_{o\nu}(1+\cos 2\pi\nu\tau)d\nu$ donc :

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_o e^{-\frac{(\nu-\nu_o)^2}{a^2}}(1+\cos 2\pi\nu\tau)d\nu$$

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_o e^{-\frac{(\nu-\nu_o)^2}{a^2}}d\nu + \int_{-\infty}^{+\infty} I_o e^{-\frac{(\nu-\nu_o)^2}{a^2}}(\frac{e^{j2\pi\nu\tau}+e^{-j2\pi\nu\tau}}{2})d\nu$$

Pour utiliser l'intégral donnée par le texte faisons le changement de variable suivant :

$u = \nu - \nu_o$ et $a = b$ c-à-d $d\nu = du$ donc :

$$I(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} I_o e^{-\frac{u^2}{a^2}} du + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_o}{2} e^{-\frac{u^2}{a^2}} e^{j2\pi\nu\tau} du + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_o}{2} e^{-\frac{u^2}{a^2}} e^{-j2\pi\nu\tau} du$$

le premier terme correspond à $x = 0$ donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_o e^{-\frac{u^2}{a^2}} du = b\sqrt{\pi} = a\sqrt{\pi}$$

Les deux derniers termes peuvent se mettre, en remplaçant ν par $u + \nu_o$, sous la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_o}{2} e^{-\frac{u^2}{a^2}} e^{j2\pi\nu\tau} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_o}{2} e^{-\frac{u^2}{a^2}} e^{j2\pi u\tau} e^{j2\pi\nu_o\tau} du = e^{j2\pi\nu_o\tau} \times a\sqrt{\pi} \times e^{-\pi^2 a^2 \tau^2}$$

De même :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_o}{2} e^{-\frac{u^2}{a^2}} e^{j2\pi\nu.(-\tau)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I_o}{2} e^{-\frac{u^2}{a^2}} e^{j2\pi u.(-\tau)} e^{-j2\pi\nu_o\tau} du = e^{-j2\pi\nu_o\tau} \times a\sqrt{\pi} \times e^{-\pi^2 a^2.(-\tau)^2} = e^{-j2\pi\nu_o\tau} \times a\sqrt{\pi} \times e^{-\pi^2 a^2 \tau^2}$$

finalement :

$$I(\tau) = a\sqrt{\pi} + a\sqrt{\pi}.e^{-\pi^2 a^2 \tau^2}.\frac{e^{j2\pi\nu_o\tau}}{2} + a\sqrt{\pi}.e^{-\pi^2 a^2 \tau^2}.\frac{e^{-j2\pi\nu_o\tau}}{2}$$

donc :

$$I(\tau) = a\sqrt{\pi}(1 + e^{-\pi^2 a^2 \tau^2}.\cos(2\pi\nu_o\tau))$$